C O N C O U R S D ' A D M I S S I O N ANNEE 1991

A L ' E C O L E D E L ' A I R

PREMIERE EPREUVE A OPTION

MATHEMATIQUES

M - P

(Durée : 3 heures - coefficient : 9)

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note e l'application identité de E sur lui-même, et fg le composé de deux endomorphismes f et g de E.

Rappel : On dit qu'un sous espace F est stable par un endomorphisme f si $\forall \vec{x} \in F$ son image $f(\vec{x}) \in F$.

1°) Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = e$. On pose $v = u - e$ et $w = u + e$. Soient F l'espace image de v et G l'espace image de ω . On note p le rang de v et q le rang de w .

a) Montrer que F est inclus dans le noyau de w .

b) Calculer e en fonction de v et de w . En déduire que E est la somme des sous-espaces F et G .

c) Montrer que $p + q = n$

d) En déduire que u est diagonalisable. Comment doit-on choisir une base de E pour que la matrice associée à u dans cette base soit diagonale ? Quelle sera alors cette matrice ?

2°) On considère dans toute la suite du problème trois endomorphismes de E, soient f, g et h, tels que $fg = h$, $gh = f$ et $hf = g$.

a) Montrer que f, g et h ont le même rang, le même noyau (qu'on notera N) et le même espace image (qu'on notera S).

b) Montrer que $f^2 = g^2 = h^2$.

c) Montrer que $f^5 = f$ (on pourra calculer $h^2 fh^2$)

d) Montrer que N et S sont des sous-espaces supplémentaires, et que les restrictions de f, g et h à S sont des automorphismes de S

3°) On suppose dans toute la suite du problème que f, g et h sont de rang n .

a) Quelles sont les valeurs propres possibles pour f ?

b) Montrer que les sous-espaces propres de f, s'il en existe, sont stables pour g et h .

c) Montrer que si f est un endomorphisme symétrique, alors $f^2 = e$, et que f, g et h commutent deux à deux (c'est à dire que fg = gf , gh = hg et hf = fh)

d) En déduire que dans ce cas f, g et h admettent une base de vecteurs propres commune.

e) On suppose dans cette question que f et g sont tous deux des endomorphismes symétriques. On note A, B, C les matrices associées dans une base orthonormée à f, g et h respectivement. Montrer que h est aussi un endomorphisme symétrique et que f, g et h admettent une même base orthonormée de vecteurs propres.

4°) On prend maintenant n = 2, avec f, g et h de rang 2 . On suppose que f, g et h sont trois endomorphismes symétriques distincts : $f \neq g \neq h \neq f$.

a) Est-il possible que f, g et h aient tous trois deux valeurs propres distinctes ?

b) Montrer que si f a une valeur propre double, celle-ci vaut -1 .

c) Déterminer alors (en supposant que f ait pour valeur propre double -1) les matrices associées à f, g et h dans la base orthonormée de vecteurs propres qui leur est commune.

d) Donner dans ce cas une définition géométrique de f, g et h.

5°) On prend enfin n = 3 avec f, g et h de rang 3. On suppose que f, g et h sont trois endomorphismes symétriques distincts.

Compte tenu du rôle symétrique que jouent f, g et h dans le problème, et en les permutant au besoin, chercher les matrices qui peuvent leur être associées dans la base orthonormée de vecteurs propres commune, et les transformations géométriques qu'ils représentent.

---==ooOoo==---

FIN